Traitement de signal

ENSAK. S4-2016-2017

Notes de cours tapées par : Samghouli HAFSA

Chapitre 1

Représentation d'un signal continu périodique

1.1 Généralités

Définition d'un signal

Un signal est une grandeur physique transportant une information d'une source "émettrice" vers une destination "réceptive".
Exemple :

1. Signal sonore : Ici l'information qui nous intéresse est le son causé par une onde sonore.
2. Signal électrique : On pourrait s'intéresser par exemple au courant électrique ou à la tension transportés par ce signal.

Parmi les signaux, on peut distinguer les catégories suivantes :

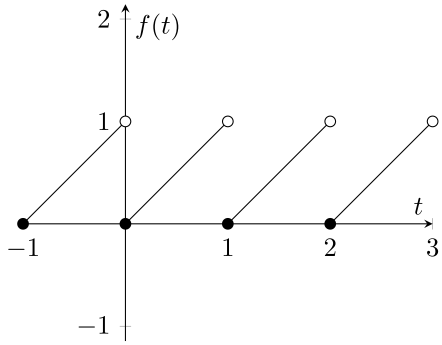
— Signal continu et signal discret
Un signal continu est un signal qui peut être modélisé par une fonction x définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, sauf peut être en un ensemble de mesure nulle.
Par contre un signal discret peut être modélisé par une suite $x_h = x(t_h), h \in \mathbb{N}$ où les t_h représentent des instants différents les uns des autres.

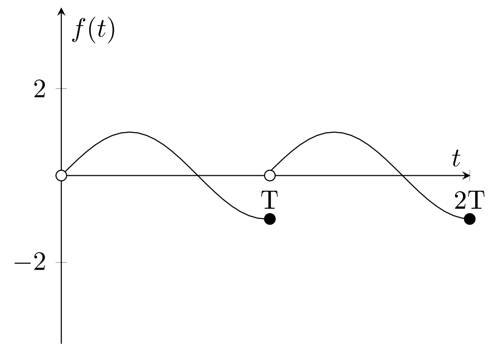
— Signal périodique ou non périodique
Un signal périodique continu est un signal qui peut être modélisé par une fonction $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tq x est une fonction périodique càd $\exists T > 0$ tq $x(t) = x(t+T) \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Le plus simple des signaux périodiques continus est $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ où $\varphi, \omega \in \mathbb{R}, \quad A \in \mathbb{R}$
En 1822, Joseph Fourier a stipulé que "tout" signal continu périodique peut être décomposé sous forme d'une somme finie ou infinie de signaux périodiques élémentaires de la forme $a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ où $w =$

$\frac{2\pi}{T}$ et T étant la période du signal. Plus précisément on "devrait" avoir $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t), t \in [0, 1]$

1.2 Décomposition d'un signal continu périodique en série de Fourier

Soit $T > 0$ un réel donné. Tout au long de ce chapitre, on modélisera un signal continu T-périodique par une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ tq f est T-périodique càd $f(t+T) = f(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$



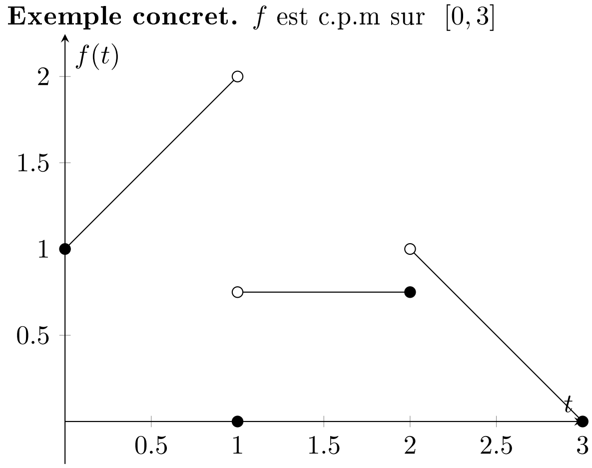


On se place dans l'espace $L^1([0,T])$ des fonctions intégrables sur $[0,T]$ càd $\int_0^T |f(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$

Remarque 1.
1. Toutes les fonctions continues sur $[0,T]$ sont dans $L^1([0,T])$
2. Mieux, toute fonction continue par morceaux sur $[0,T]$ est dans $L^1([0,T])$. Rappelons que f est c.p.m sur $[0,T]$ s' il existe une subdivision $(a_k)_{0 \le k \le n}$ de $[0,T]$ tq

$$\begin{cases} f_{\setminus]a_k, a_{k+1}[} = g_k & k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ g_k \text{ continue sur } [a_k, a_{k+1}] \end{cases}$$

Exemple concret. f est c.p.m sur $[0,3]$



$f(x^+) = \lim\limits_{\substack{t \to x \\ >}} f(t)$ et $f(x^-) = \lim\limits_{\substack{t \to x \\ <}} f(t)$
$f(0^+) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} f(t) = 1 = f(0) \qquad f(0^-)$ n'est pas défini
$f(1^-) = \frac{5}{4} \quad f(1^+) = \frac{3}{4} \quad f(1) = 1 \quad f(2^-) = \frac{3}{4} \quad f(2^+) = 1 \quad f(2) = \frac{3}{4}$
$f(3^-) = 0 \quad f(3^+)$ non défini et $f(3) = 0$

Remarque 2. Si f est continue en x alors $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$

1.2.1 Coefficients de Fourier

Soit $f \in L^1([0, T])$ et T-périodique. On pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$

— Les coefficients de Fourier complexes de f sont définis par

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} \,\mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{Z}$$

— Les coefficients trigonométriques de Fourier de f sont donnés par :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) \,\mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{N} \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) \,\mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Exercice. Soit $f \in L^1([0, T])$ T-périodique.
Montrer que $\int_0^T f(t) \,\mathrm{d}t = \int_\alpha^{\alpha+T} f(t) \,\mathrm{d}t \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$
Réponse : Par périodicité de f on a $f \in L^1([\alpha, \alpha + T]) \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$. De plus, par la relation de Chasle

$$\int_\alpha^{\alpha+T} f(t) \,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_\alpha^0 f(t) \,\mathrm{d}t}_{(1)} + \underbrace{\int_0^T f(t) \,\mathrm{d}t}_{(2)} + \underbrace{\int_T^{\alpha+T} f(t) \,\mathrm{d}t}_{(3)}$$

$(3) = \displaystyle\int_T^{\alpha+T} f(t) \,\mathrm{d}t \underset{t=x+T}{=} \int_0^\alpha f(x+T) \,\mathrm{d}x = \int_0^\alpha f(x) \,\mathrm{d}x = -(1)$ d'où le résultat.

Remarque 3. Soit $f \in L^1([0, T])$ T-périodique. Comme conséquence de ce qui précède, on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

— Si f est paire, alors

$$\begin{cases} a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) \,\mathrm{d}t \\ b_n = 0 \end{cases}$$

— Si f est impaire :

$$\begin{cases} a_n = 0 \\ b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) \,\mathrm{d}t \end{cases}$$

1.2.2 Quelques propriétés des coefficients de Fourier

On se donne une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ T-périodique et c.p.m . Les coefficients de Fourier sont définis :

$$C_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t \qquad , n \in \mathbb{Z}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{N}$$

— Si f est à valeurs réelles, on aura :

$$C_n(f) = \overline{C_n(f)} \text{ et } C_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Théorème 1 (Comportement asymptotique des coefficients de Fourier)**.**

$$\lim_{|n|\to+\infty} |C_n(f)| = 0 \quad \text{en conséquence : } \lim_{n\infty} a_n(f) = \lim_{n\infty} b_n(f) = 0$$

Remarque 4. On verra par la suite que sous certaines conditions, on a :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$$

Théorème 2. Si f est continue et C^1 par morceaux de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ et T-périodique alors

$$C_n(f') = in\omega C_n(f)$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Supposons que f est C^1 sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$:
$C_n(f') = \frac{1}{T}\int_0^T f'(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t$
$u = e^{-in\omega t} \longrightarrow u' = -in\omega e^{-in\omega t}$
$v' = f' \longrightarrow v = f$
Donc $C_n(f') = \frac{1}{T}\underbrace{\left[f(t)e^{-in\omega t}\right]_0^T}_{\substack{=0\\ \text{car T-périodique}}} + \frac{in\omega}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t = in\omega C_n(f)$
Cas général : f C^1 p.m
$\exists$ donc une subdivision $(a_k)_{0\le k\le n}$ tq : $\begin{cases} f_{\backslash]a_k,a_{k+1}[} = g_k \\ g_k \ C^1 \text{ sur } [a_k, a_{k+1}] \end{cases}$
Donc

$$\frac{1}{T}\int_0^T f'(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} g'(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\left[in\omega\int_{a_k}^{a_{k+1}} g_k(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t + \left[g_k(t)e^{-in\omega t}\right]_{a_k}^{a_{k+1}}\right]$$

Comme $f_{\backslash]a_k,a_{k+1}[} = g_k$ on a :
$g_k(a_k) = \lim\limits_{\substack{t\to a_k\\ >}} g(t) = \lim\limits_{\substack{t\to a_k\\ >}} f(t) = f(a_k^+) = f(a_k)$ car f est continue sur $\mathbb{R}$
De même : $g_k(a_{k+1}) = f(a_{k+1})$
Donc $\left[g_k(t)e^{-in\omega t}\right]_{a_k}^{a_{k+1}} = \left[f(t)e^{-in\omega t}\right]_{a_k}^{a_{k+1}}$
d'où par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left[g_k(t)e^{-in\omega t}\right]_{a_k}^{a_{k+1}} = \left[f(t)e^{-in\omega t}\right]_0^T = 0$$

Donc

$$C_n f'(t) = \frac{in\omega}{T}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{in\omega}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t = in\omega C_n(f)$$

□

Corollaire :

— f continue de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et C^1 p.m, T-périodique .
$a_n(f') = n\omega b_n(f)$
$b_n(f') = -n\omega a_n(f)$

— Si f est continue, C^1 p.m, T-périodique alors $C_n(f) \underset{|n|\to+\infty}{=} \circ(\frac{1}{n})$

— Si f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et C^2 p.m, T-périodique alors $C_n(f) \underset{|n|\to+\infty}{=} \circ(\frac{1}{n^2})$
d'où si f est C^k sur $\mathbb{R}$ et C^{k+1} p.m, T-périodique alors $C_n(f) \underset{|n|\to+\infty}{=} \circ(\frac{1}{n^{k+1}})$

Série de Fourier

Soit f c.p.m et T-périodique . La série de Fourier de f est la série définie par

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(f)e^{in\omega t} \quad \text{(série exponentielle)}$$

ou

$$\frac{a_0}{2}(f) + \sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t) \quad \text{(série trigonométrique)}$$

On dira que la série de Fourier converge si ces séries convergent simplement sur $\mathbb{R}$

Théorème de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction C^1 p.m et T-périodique . Alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(f)e^{in\omega x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)$$

où $f(x^+) = \lim\limits_{\substack{t \to x \\ >}} f(t)$ et $f(x^-) = \lim\limits_{\substack{t \to x \\ <}} f(t)$
Si de plus f est continue alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$

Egalité de Parseval

Si f est continue par morceaux, T-périodique alors

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = |C_0(f)|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |C_n(f)|^2 = \frac{(a_0(f))^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2(f) + b_n^2(f))$$

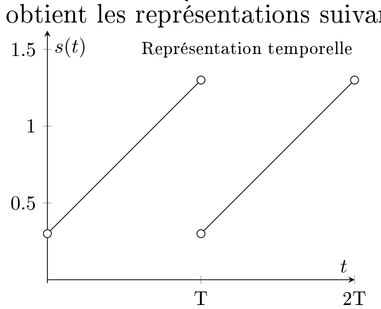
Remarque sur la convergence d'une série de Fourier d'un signal

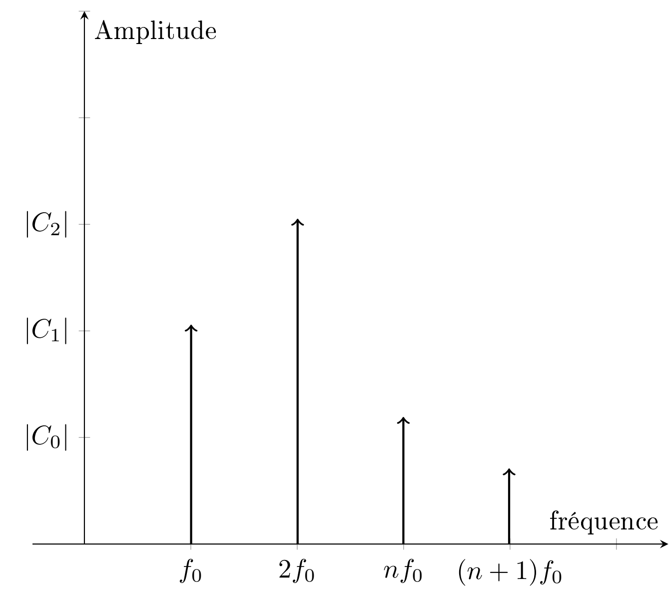
Soit f un signal continu C^1 p.m sur $\mathbb{R}$

— On a vu que (par Dirichlet) :

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(S)e^{in\omega t} = \frac{a_0(S)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(S)\cos(n\omega t) + b_n(S)\sin(n\omega t)\ , t \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

La suite $(C_n(S))_{n\in\mathbb{Z}}$ ou $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ est appelée le spectre de S et l'écriture (1.1) est dite la représentation spectrale du signal S .
On note $f_0 = \frac{1}{T}$ la fréquence fondamentale .
Donc $S(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{i2\pi n f_0 t}, t \in \mathbb{R}$
On utilise alors la notation "fréquentielle" $S(f)$ " $=$ " $\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \delta(f - nf_0)$
où δ "vérifie" : $\begin{cases} \delta(f) = 1 & si \quad f = 0 \\ \delta(f) = 0 & si \quad f \neq 0 \end{cases}$
On obtient les représentations suivantes :





— On définit $L^2([0,T]) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} / \int_0^T |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t < +\infty\}$
Si $f \in L^2([0,T])$ on dit que f est de carré intégrable, ou encore f est à énergie finie . $L^2([0,T])$ est un $\mathbb{C}$ e.v qu'on munit du produit hermitien $< f, g >= \frac{1}{T}\int_0^T f(t).\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$. La norme associée à ce produit hermitien est $||f||_2 = \sqrt{< f, f >} = (\int_0^T |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}$
On considère $e_n(t) = e^{in\omega t}, \quad t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$. (e_n) est une base orthonormale de $L^2([0,T])$:

$$< e_n, e_m >= \frac{1}{T}\int_0^T e^{-i\omega(n-m)t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & si\ n \neq m \\ 1 & si\ n = m \end{cases}$$

De plus $C_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{in\omega t}\,\mathrm{d}t =< f, e_n > \quad n \in \mathbb{Z}$
Donc on peut écrire $f = \sum_{-\infty}^{+\infty} < f, e_n > e_n$

— Par Parseval on a $\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{-\infty}^{+\infty} |C_n(f)|^2$
L'harmonique à la fréquence nf_0 qui compose f est :
$h_n(t) = C_n(f)e^{in\omega t}$
L'énergie moyenne de h_n est $||h_n||_2^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |h_n(t)|^2 \,\mathrm{d}t = |C_n(t)|^2$
Donc la formule de Parseval peut être interprétée en disant que l'énergie moyenne du signal est la somme des énergies moyennes des harmoniques qui composent ce signal et on a : $||f(t)||_2^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |C_n(f)|^2$
On dit aussi que la série de Fourier de f converge en moyenne quadratique vers f .

Chapitre 2

Transformée de Fourier

2.1 Définitions et propriétés

Espace $L^p(\mathbb{R}), p \geq 1$

Définition. Soit $p \geq 1$ un réel donné . Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction c.p.m. On dira que $f \in L^p(\mathbb{R})$ si la fonction $t \mapsto |f(t)|^p$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ càd $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \, \mathrm{d}t < +\infty$

Théorème 3. (de comparaison)
Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{C} \quad |f(t)| \leq |g(t)|$ alors g intégrable sur $[a,b] \Rightarrow f$ intégrable sur $[a,b]$
De même si $f(t) \underset{t\to b}{=} O(g(t))$, g intégrable au voisinage de b $\Rightarrow f$ intégrable au voisinage de b

Exemple.
1. $p = 1 \quad f(t) = e^{-t^2}, f$ continue sur $\mathbb{R}$
   Au voisinage de $+\infty \quad t^2 e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} O(\frac{1}{t^2})$
   Par Riemann et le théorème de comparaison, $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. De même au voisinage de $-\infty$
2. Avec le même raisonnement, montrer que $f \in L^2(\mathbb{R})$
3. Deux classes de fonctions sont importantes dans les espaces $L^p(\mathbb{R}), p \geq 1$
   — $1^{\text{ère}}$ classe : $D(\mathbb{R})$
   $D(\mathbb{R})$ est l'ensemble est fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ et nulles en dehors d'un segment $[a,b]$ (on dit aussi à support compact)
   Exemple.
   $$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-a)(b-x)}} & si\ x \in]a,b[\\ 0 & sinon \end{cases}$$
   f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $\mathbb{R} \backslash [a,b]$
   Toute $f \in D(\mathbb{R})$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ où support$(f) \subset [a,b]$

— $2^{\text{ème}}$ classe : $S(\mathbb{R})$ classe de Schwarz

Définition. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction . On dira que $f \in S(\mathbb{R})$ si :

(a) f est C^{∞} sur $\mathbb{R}$

(b) $\forall n, m \in \mathbb{N}$ on a $\underset{x\in\mathbb{R}}{sup}|x^n f^{(m)}(x)| < +\infty$

Exemple. $f(t) = e^{-t^2} \quad f \in S(\mathbb{R})$

Pour $m = 0$ et $n = 2 \quad \underset{x\in\mathbb{R}}{sup}|x^2 f(x)| < +\infty$
Pour $m = 0$ et $n = 0 \quad sup|f(x)| < +\infty$
$\Rightarrow M = sup((1 + x^2)|f(x)|) < +\infty \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{M}{1+x^2} \ \forall x \in \mathbb{R}$
et $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc par le théorème de comparaison : $f \in L^1(\mathbb{R})$
Mieux : $D(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R}) \ \forall p \geq 1$
$S(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R}) \ \forall p \geq 1$

2.2 Transformée de Fourier

Définition. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction . On suppose que $f \in L^1(\mathbb{R})$.
La transformée de Fourier de f est donnée par :

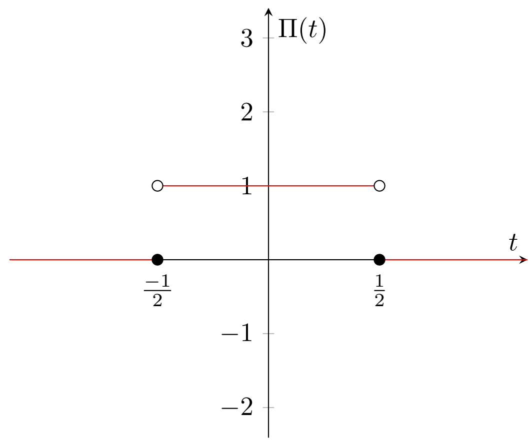
$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi\lambda t}\,\mathrm{d}t, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Remarque 5.

1. Ici λ représente une fréquence en Hz et t le temps en s
2. Dans la littérature, on trouve des définitions et des notations différentes de $\hat{f}$. Parfois on notera $\hat{f} = \mathfrak{F}(f)$
3. Comme dans le cas périodique, la transformée de Fourier de f donne la représentation fréquentielle de f

Exemple. Le signal ou fonction porte est défini par :

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & si\ |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & si\ |t| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$



Π est est c.p.m et nulle en dehors de $[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$ dont Π est intégrable sur $\mathbb{R}$
Alors : $\hat{\Pi}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \Pi(t) e^{-2\pi i \lambda t}\, \mathrm{d}t = \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i \lambda t}\, \mathrm{d}t$
Si $\lambda \neq 0$: $\quad \hat{\Pi}(\lambda) = \frac{-1}{2\pi i \lambda}[e^{-2\pi i \lambda t}]_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi i \lambda}(e^{\pi i \lambda} - e^{-\pi i \lambda}) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\lambda\pi}$
Si $\lambda = 0$: $\quad \hat{\Pi}(0) = \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = 1$

2.3 Quelques propriétés fondamentales de la transformée de Fourier

— **P 1 :** $f \to \hat{f}$ est linéaire sur $L^1(\mathbb{R})$ $\qquad \widehat{f + \lambda g} = \hat{f} + \lambda \hat{g} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$
— **P 2 :** Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f}$ est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$ avec $|\hat{f}(\lambda)| \leq ||f||_{L^1}$ où $||f||_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, \mathrm{d}t$
— **P 3 : Théorème de Lebesgue** Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\lim\limits_{|\lambda| \to +\infty} \hat{f}(\lambda) = 0$
— **P 4 : Action de la transformée de Fourier sur une translation ou compensation du domaine des temps**
Plus précisément, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tq $f \in L^1(\mathbb{R})$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, $\quad b \neq 0$

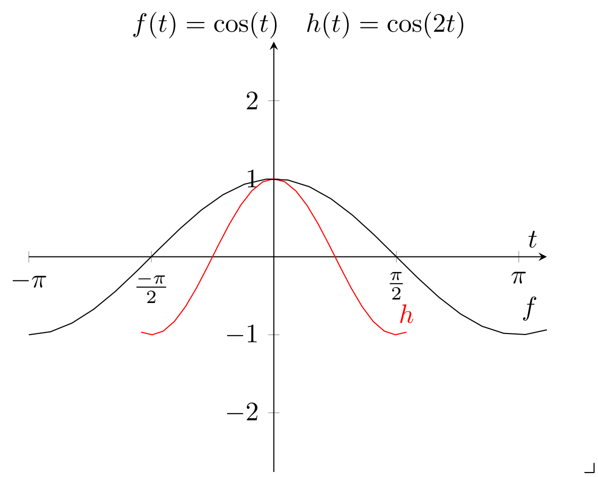
$$\widehat{f(.-a)}(\lambda) = e^{-2i\pi\lambda a} \hat{f}(\lambda) \qquad\qquad \widehat{f(b.)}(\lambda) = \frac{1}{|b|} \hat{f}(\frac{\lambda}{b})$$

Démonstration.

$$\widehat{f(.-a)}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t-a) e^{-2i\pi\lambda t}\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi\lambda(t+a)}\, \mathrm{d}t = e^{-2i\pi\lambda a} \hat{f}(\lambda)$$

$$\widehat{f(b.)}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(bt) e^{-2i\pi\lambda t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{|b|} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi \frac{\lambda}{b} t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{|b|} \hat{f}(\frac{\lambda}{b})$$

□



— **P 5 : Dérivation** Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si l'application $t \mapsto tf(t)$ est intégrable alors $\hat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a $\hat{f}'(\lambda) = -2i\pi \int_{\mathbb{R}} tf(t)e^{-2i\pi\lambda t}\,\mathrm{d}t$ càd $\hat{f}'(\lambda) = -2i\pi\ \widehat{tf(t)}(\lambda)$

Application
Calcul de $\mathfrak{F}(e^{-\pi t^2})(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}$
On pose $f(t) = e^{-\pi t^2}$ $, t \in \mathbb{R}$

1. Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et que $t \mapsto tf(t)$ est aussi dans $L^1(\mathbb{R})$
2. On pose $g(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$
   (a) Montrer que g est C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer g' en fonction de g
   (b) En déduire la valeur de g

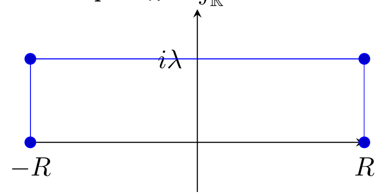
On a $t \mapsto tf(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et on a $e^{-\pi t^2} \underset{|t|\to+\infty}{=} O(\frac{1}{t^2})$ donc par Riemann et le théorème de comparaison f est donc intégrable sur $\mathbb{R}$
Posons $h(t) = te^{-\pi t^2}$ $, t \in \mathbb{R}$. h est continue sur $\mathbb{R}$ et on a $te^{-\pi t^2} \underset{|t|\to+\infty}{=} O(\frac{1}{t^2})$ donc par Riemann et le théorème de comparaison h est intégrable
Donc g est C^1 sur $\mathbb{R}$ et donc $g'(\lambda) = \hat{f}'(\lambda) = -2i\pi\widehat{tf(t)}(\lambda)$
Donc

$$g'(\lambda) = -2i\pi \int_{\mathbb{R}} te^{-\pi t^2} e^{-2i\pi\lambda t}\,\mathrm{d}t = i \int_{\mathbb{R}} (e^{-\pi t^2})' e^{-2i\pi\lambda t}\,\mathrm{d}t$$
$$= i\,\underbrace{[e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi\lambda t}]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - 2\pi\lambda \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi\lambda t}\,\mathrm{d}t = -2\pi\lambda g(\lambda)$$

Donc g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 2\lambda\pi y = 0$: (E)
La solution générale de (E) est $y(\lambda) = ce^{-\pi\lambda^2}$ $, c \in \mathbb{C}$
On a donc $g(\lambda) = g(0)e^{-\pi\lambda^2}$ et $g(0) = \hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t = 1$ ($\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$)
Donc $g(\lambda) = e^{-\pi\lambda^2}$

$\widehat{e^{-\pi\lambda^2}} = e^{-\pi\lambda^2}$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$
Autre méthode : $\widehat{e^{-\pi t^2}}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi\lambda t}\,\mathrm{d}t = e^{-\pi\lambda^2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(t+i\lambda)^2}\,\mathrm{d}t}_{I_\lambda}$

Avec le théorème des résidus, montrer que $I_\lambda = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(t+i\lambda)^2}\,\mathrm{d}t = 1$



Considérer $f(z) = e^{-\pi z^2}$ et $\Gamma_{\mathbb{R}}$ $\quad R \to +\infty$

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction C^1
On suppose que f et f' sont dans $L^1(\mathbb{R})$. Calculer $\widehat{f'}$ en fonction de $\hat{f}$
$\Rightarrow$ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\widehat{f'}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{-2i\pi\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \underbrace{\int_{-A}^{A} f'(t)e^{-2i\pi\lambda t}\,\mathrm{d}t}_{(1)}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \underbrace{[f(t)e^{-2i\pi\lambda t}]_{-A}^{A}}_{(3)} + 2i\lambda \underbrace{\int_{-A}^{A} f(t)e^{-2i\pi\lambda t}\,\mathrm{d}t}_{(2)}$$

$\lim\limits_{A\infty}$ (1) existe car $f' \in L^1(\mathbb{R})$ et $\lim\limits_{A\infty}$ (2) existe car $f \in L^1(\mathbb{R})$
Donc $\lim\limits_{A\infty}$ (3) existe et on montre que cette limite est nulle (le faire pour $f \in S(\mathbb{R})$ et utiliser la densité de $S(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$)
Donc $\widehat{f'}(\lambda) = 2i\pi\lambda\hat{f}(\lambda)$

En résumé :

$$\hat{f}\,'(\lambda) = -2i\pi\ \widehat{tf}(\lambda) \qquad \widehat{f'}(\lambda) = 2i\pi\lambda\hat{f}(\lambda)$$

Inversion de la transformée de Fourier

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On sait que $\hat{f}$ est bien définie et donnée par : $\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi\lambda t}\,\mathrm{d}t$. Question : Peut-on retrouver f si l'on connaît $\hat{f}$?
La réponse est : YES et on a le théorème suivant :

Théorème 4. Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tq f et $\hat{f}$ soient intégrables . Alors on a :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda)e^{2i\pi\lambda t}\,\mathrm{d}\lambda$$

Cette formule est appelée formule d'inversion .

Remarque 6. La formule d'inversion peut s'écrire de la manière suivante :

$$f(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \hat{f}(\lambda)$$

$$f \xleftarrow{\mathfrak{F}} \hat{f}(-\lambda)$$

Parfois on a : $g(-x) = gos(x)$ où $s(x) = -x$
Donc $\hat{\hat{f}}(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda) e^{-2i\pi\lambda t}\,\mathrm{d}\lambda = f(-t)$
On retient donc la formule $\hat{\hat{f}}(t) = f(-t)$

2.4 Produit de convolution de deux fonctions

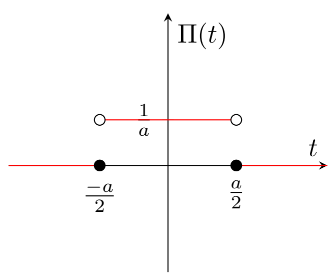
Théorème 5. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$ l'application $z \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On note alors

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

$f * g$ est appelé produit de convolution de f et g et $f * g \in L^1(\mathbb{R})$

Exemple. Pour comprendre la signification physique du produit de convolution, on traite l'exemple suivant :
Soit $a > 0$ et Π_a la fonction porte : Le signal ou fonction porte est défini par :

$$\Pi_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & si\ |t| < \frac{a}{2} \\ 0 & si\ |t| \geq \frac{a}{2} \end{cases}$$



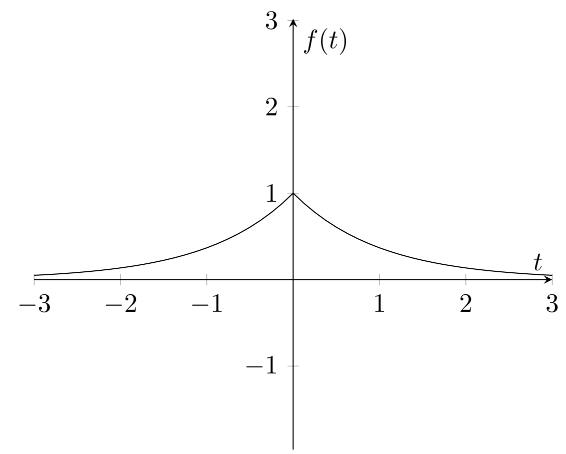
On a déjà vu que $\Pi_a \in L^1(\mathbb{R})$

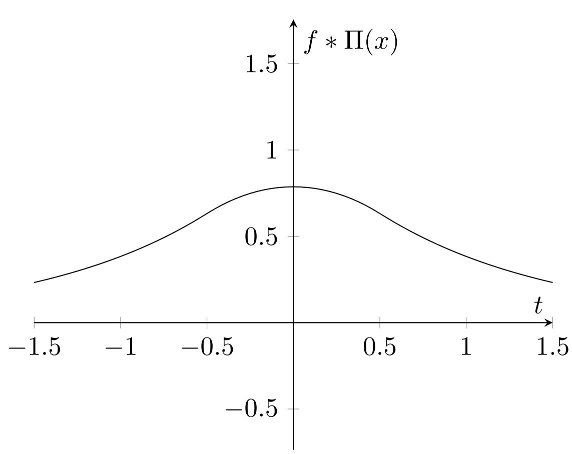
1. Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, calculer $f * \Pi_a(x)$ et donner une interprétation physique à ce produit
2. Appliquer à $f(t) = e^{-|t|} \quad t \in \mathbb{R}$ et $a = 1$

$\Rightarrow$1) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, donc $f * \Pi_a$ est bien défini et on a
$f * \Pi_a(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\Pi_a(x-t)\,\mathrm{d}t$
On a $|x-t| \leq \frac{a}{2} \Leftrightarrow \frac{-a}{2} \leq x - t \leq \frac{a}{2} \Leftrightarrow x - \frac{a}{2} \leq t \leq x + \frac{a}{2}$
Donc $f * \Pi_a(x) = \int_{x-\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}} f(t)\Pi_a(x-t)\,\mathrm{d}t$

D'où $f * \Pi_a(x) = \frac{1}{a}\int_{x-\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$
On voit que $f * \Pi_a(x)$ est une moyenne continue des valeurs prises par f sur l'intervalle $[x - \frac{a}{2}, x + \frac{a}{2}]$ centré en x. Ceci permettra en particulier d'atténuer les pics du signal f et de diminuer la contribution du bruit.
2) Ici, on a $a = 1$ et $f(t) = e^{-|t|}$
$f * \Pi(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} e^{-|t|}\,\mathrm{d}t$

- 1^er cas : $x \leq \frac{-1}{2}$
  $f * \Pi(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} e^{t}\,\mathrm{d}t = e^{x+\frac{1}{2}} - e^{x-\frac{1}{2}}$
- 2^e cas : $\frac{-1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$
  $f * \Pi(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{0} e^{t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x+\frac{1}{2}} e^{-t}\,\mathrm{d}t = (1 - e^{x-\frac{1}{2}}) + (1 - e^{-(x+\frac{1}{2})}) = 2 - (e^{-(x+\frac{1}{2})} + e^{x-\frac{1}{2}})$
- 3^e cas : $x \geq \frac{1}{2}$
  $f * \Pi(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} e^{-t}\,\mathrm{d}t = e^{-(x-\frac{1}{2})} - e^{-(x+\frac{1}{2})}$





Propriétés de la convolution

Proposition On se donne $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$

1. Le produit de convolution est commutatif : $f * g = g * f$
2. Le produit de convolution est associatif : $(f+g) * h = f * (g+h)$
3. La convolution admet un élément neutre qui n'est pas une fonction : c'est l'impulsion de Dirac δ (voir plus loin)

Exercice. On considère la fonction $\varphi_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} e^{-\pi(\frac{t}{2})^2}, \quad t \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Calculer $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \varphi_\epsilon * f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ où on suppose f continue bornée
$\Rightarrow \ \varphi_\epsilon * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\epsilon(t) f(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\epsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(\frac{t}{2})^2} f(x-t)\,\mathrm{d}t$
Par un changement de variables : $\varphi_\epsilon * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} f(x-\epsilon-t)\,\mathrm{d}t$
Par le théorème de convergence dominée :
$\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} \varphi_\epsilon * f(x) = f(x)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t = f(x)$

Proposition Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. On suppose que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $f' \in L^1(\mathbb{R})$
Alors $f * g$ est C^1 et on a : $(f*g)'(x) = f' * g(x)$

Remarque 7.
1. Si on suppose que g est C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $g' \in L^1(\mathbb{R})$ on aura de même $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et $(f*g)'(x) = f * g'(x)$
2. On peut généraliser ce résultat :
   Si $f \in C^k(\mathbb{R})$ et $f^{(i)} \in L^1(\mathbb{R})$ $\forall i = 0, 1, \ldots, k$ alors
   $f * g \in C^k(\mathbb{R})$ et $(f*g)^{(i)}(x) = f^{(i)} * g(x)$

Théorème 6. Transformée de Fourier d'une convolution
Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\widehat{f * g}(\lambda) = \hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)$$

Démonstration.

$$\widehat{f*g}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x) e^{-2i\pi\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(t) g(x-t)\,\mathrm{d}t\right] e^{-2i\pi\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

$$\underset{=}{Fubini} \int_{\mathbb{R}} f(t) \left[\int_{\mathbb{R}} g(x-t) e^{-2i\pi\lambda x}\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi\lambda t} \left[\int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-2i\pi\lambda x}\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}t$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi\lambda t}\,\mathrm{d}t\right) \hat{g}(\lambda) = \hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)$$

□

Remarque 8. Si on applique la transformée une 2^e fois : $f * g(-\lambda) = \widehat{\hat{f}.\hat{g}}(\lambda)$
Si $f, \hat{f}, g, \hat{g}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ (sinon on peut choisir $f, g \in S(\mathbb{R})$)
on a $\widehat{\hat{f}.\hat{g}}(x) = f * g(-x) \quad (1)$
On note $(sf)(x) = f(-x)$. Par cette notation $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x) = (sf)(x)$
Si on remplace f par $\hat{f}$ et g par $\hat{g}$ dans (1) : $\widehat{(sf) * (sg)}(x) = (s\ \hat{f} * \hat{g})(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Si on remplace f par sf et g âr sg : $s(sf) = f \qquad s(sg) = g$
On aura $\widehat{fg}(x) = (s(\widehat{sf * \hat{s}g}))(x) = (s(s\hat{f}) * (s\hat{g}))(x)$
Or par définition, pour deux fonctions quelconques f, g :

$$(sf) * (sg)(x) = \int_{\mathbb{R}} (sf)(x)(sg)(x - z)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}} f(-z)g(z - x)\,\mathrm{d}z$$
$$z \underset{=}{=} -u \int_{\mathbb{R}} f(z)g(-z - x)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}} f(z)g((-x) - z)\,\mathrm{d}z = f * g(-x)$$
$$= [s(f * g)]\,(x)$$

Donc finalement on aura : $\widehat{fg}(x) = \hat{f} * \hat{g}(x)$
En conclusion :
Proposition Si $f, \hat{f}, g, \hat{g}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$ et $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$

2.5 Identité de Plancherel et Parseval

Théorème 7. La transformée de Fourier s'étend d'une manière unique à l'espace $L^2(\mathbb{R})$ vérifiant $||f||_{L^1(\mathbb{R})} = ||f||_{L^2(\mathbb{R})}$ pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ où $||f||_{L^p(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}_{p \geq 1}$
De plus :

$$\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \text{ on a } \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda)\overline{\hat{g}(\lambda)}\,\mathrm{d}t$$

Identité de Plancherel

Si on prend $f = g$

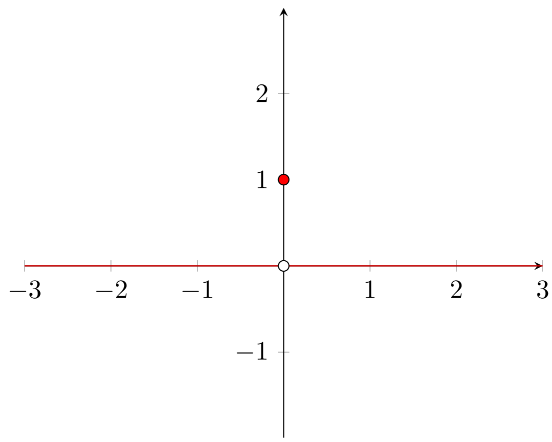
$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\lambda)|^2\,\mathrm{d}t$$

Identité de Parseval

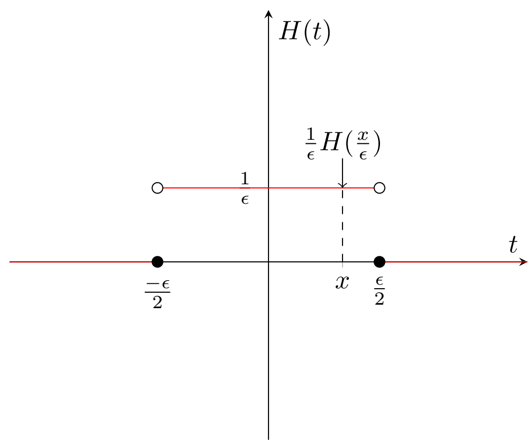
2.6 Impulsion de Dirac

Les physiciens ont besoin d'une "fonction" δ qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1 \\ \delta(t) = 0 \ \forall t \neq 0 \ et \ \delta(0) = +\infty \end{cases}$$



Le problème est qu'il n'existe aucune fonction δ qui vérifie ces propriétés. Pour cela, les physiciens ont recours à approcher δ par une fonction porte de longueur $\epsilon << 1$ et d'intégrale égale à 1 . On écrit alors $\delta \sim \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} H(\frac{x}{\epsilon})$ où H est la fonction porte définie par $H(t) = \begin{cases} 1 & si\ |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & sinon \end{cases}$



Dans toute la suite on utilise le formatisme des physiciens

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} f(t) H(\frac{t}{\epsilon})\,\mathrm{d}t$$

Avec ce formatisme, on obtient quelques propriétés de l'impulsion δ

— **P 1** : Si f est continue $\int_{\mathbb{R}} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$

Démonstration. Par définition : $\int_{\mathbb{R}} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) H(\frac{t}{\epsilon})\,\mathrm{d}t$

On sait que $H_a(t) = \begin{cases} 1 & si\ |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & sinon \end{cases}$

Donc $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(\epsilon u)\,\mathrm{d}u = f(0)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = f(0)$ □

Remarque 9. δ est dite l'impulsion de Dirac centrée en (ou portée par) 1 . D'une manière générale, pour $a \in \mathbb{R}$, on définit "$\delta_a(t) = \delta(a-t)$" pour les physiciens. Pour les mathématiciens :

$$\delta_a \rightsquigarrow \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} H\left(\frac{a-x}{\epsilon}\right)$$

Ainsi :

— **P 2** : Si f continue : $\int_{\mathbb{R}} f(t)\delta_a(t)\,\mathrm{d}t = f(a)$

Démonstration. Même démonstration □

En utilisant la notation physicienne : $\int_{\mathbb{R}} f(t)\delta_a(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(t)\delta(a-t)\,\mathrm{d}t$ on peut voir $\int_{\mathbb{R}} f(t)\delta_a(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(t)\delta(a-t)\,\mathrm{d}t$ comme le produit de convolution $f*\delta(a)$ On obtient donc la formule $f*\delta(a) = f(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$. Autrement dit :

— **P 3** : $f*\delta = f$

— **P 4** : $\hat{\delta}(\lambda) = 1 \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$

Démonstration. $\hat{\delta}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\lambda t}\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0) = 1$ □

Application à la résolution de quelques équations différentielles linéaires

On considère un système physique qui, en réponse à une entrée $e(t)$ "connue" donne une sortie $s(t)$, que l'on veut déterminer . Souvent $e(t)$ et $s(t)$ sont liées par des équations différentielles linéaires. Pour lier les idées, on suppose ici que :

$$s''(t) + as(t) = e(t) \quad t \in \mathbb{R}$$

Si on remplace e par l'impulsion de Dirac δ, la réponse est appelée réponse impulsionnelle du système, et qu'on notera ici par R.
Ainsi $R'' + aR = \delta(t)$ "$t \in \mathbb{R}''$: (E_1)
On fait opérer le produit de convolution $*$ avec e dans (E_1), on obtient : $e * R'' + ae * R = e * \delta$
Donc $(e*R)'' + ae*R = e$ donc $s = e*R$ est la sortie du système physique correspondant à l'entrée
En conclusion : La réponse associée à l'entrée e est $s = e*R$ où R est la réponse impulsionnelle .

Chapitre 3

Transformée de Laplace

3.1 Définitions et propriétés

3.1.1 Définitions

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction c.p.m.
Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t$
Lorsque l'intégrale a un sens, $\mathcal{L}(f)$ est dite la transformée de Laplace de f.

Remarque 10. On voit que $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \mathcal{L}(f)(2i\pi\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\lambda t}\,\mathrm{d}t = \widehat{uf}(\lambda)$
où $u(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$

Exemple. 1. Donner $\mathcal{L}(1)(z)$

2. On donne $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{C}$. Calculer $\mathcal{L}(f)(z)$

$\Rightarrow$

1. $\mathcal{L}(1)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt}\,\mathrm{d}t$
   $|e^{-zt}| = e^{-Re(z)t}$ et $t \mapsto e^{-Re(z)t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $Re(z) > 0$
   Donc pour $Re(z) > 0 \quad \mathcal{L}(1)(z) = -\frac{1}{z}[e^{-zt}]_0^{+\infty} = \frac{1}{z}$
2. $f(t) = e^{at}, \quad a \in \mathbb{C}$
   $\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-(z-a)t}\,\mathrm{d}t$
   pour $Re(z-a) > 0$ càd $Re(z) > Re(a)$
   $\mathcal{L}(e^{at})(z) = \frac{1}{z-a}$

En déduire $\mathcal{L}(\sin(t))$ et $\mathcal{L}(\cos(t))$
$\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$
$\mathcal{L}(\cos(t))(z) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}(e^{it})(z) + \mathcal{L}(e^{-it})(z)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i}\right] \quad Re(z) > 0$

$$\mathcal{L}(\cos(t))(z) = \frac{z}{z^2+1} \qquad \mathcal{L}(\sin(t))(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

3.1.2 Propriétés de la transformée de Laplace

Toutes les intégrales présentées dans ce paragraphe sont sous condition d'existence

— **P1**

1. Linéarité : $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$
   $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ on a $\mathcal{L}(f + \lambda g) = \mathcal{L}(f) + \lambda \mathcal{L}(g)$
2. Injectivité : si $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$ alors $f = g$

— **P2** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$

1. Effet d'une translation
   Soit $a \geq 0$. On suppose que $f = 0$ sur $]-\infty, 0]$
   Alors $\mathcal{L}(f(t-a))(p) = e^{-pa}\mathcal{L}(f)(p)$
2. Effet d'un changement d'échelle
   Soit $a > 0$ $\quad \mathcal{L}(f(at))(p) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f)(\frac{p}{a})$

Exemple. En utilisant ce qui précède, calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

1. $f(t) = u(t-1)\sin(2t+1)$
2. $g(t) = \cosh(\frac{t-1}{2})u(t)$ où $u(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$

$\Rightarrow$

1. $\mathcal{L}(e^{at})(p) = \frac{1}{p-a}$ avec $Re(p) > Re(a)$
   De là on déduit $\mathcal{L}(\sin(t))(p) = \frac{1}{p^2+1}$
   L'application $t \mapsto u(t-1)\sin(2t+1)$ est causale, donc :
   $\mathcal{L}(f)(p) = e^p\mathcal{L}(u(t)\sin(2t))(p) = \frac{e^p}{2}\frac{1}{\frac{p^2}{4}+1}$
   D'où $\mathcal{L}(u(t-1)\sin(2t+1))(p) = \frac{2e^p}{p^2+4}$
2. On suppose que l'hypothèse de la causalité est satisfaite
   $g(t) = \cosh(\frac{t-1}{2}) = (\delta_{\frac{1}{2}}\tau_1)\cosh(t)$
   $\mathcal{L}(g)(p) = 2\mathcal{L}(\tau_1 \cosh)(2p) = 2e^{-2p}\mathcal{L}(\cosh)(2p)$
   $\cosh(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$
   $\mathcal{L}(\cosh)(p) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}\right] = \frac{p}{p^2+1}$ D'où $\mathcal{L}(g)(p) = \frac{4pe^{-2p}}{4p^2-1}$

— **P3** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$
On suppose que f est C^1 sur $\mathbb{R}^+$et que $\mathcal{L}(f)$ et $\mathcal{L}(f')$ sont bien définies pour $Re(p) > \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ donné. Alors on a :

$$\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(p) - f(0^+)$$

Démonstration. Soit $p \in \mathbb{C}$ tq $Re(p) > \alpha$

$$\mathcal{L}(f')(p) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \lim_{X\to+\infty}\int_0^X f'(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$
$$= \lim_{X\to+\infty}\left[\left[e^{-pt}f(t)\right]_0^X + p\int_0^X f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t\right]$$

Par hypothèse on aura $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{-pX}f(X)$ existe et $t \mapsto e^{-pt}f(t)$ intégrable. Donc cette limite est nulle. On obtient donc :

$$\mathcal{L}(f')(p) = -f(0^+) + p\mathcal{L}(f)(p)$$

$\square$

Remarque 11. Si f est C^2 sur $\mathbb{R}^+$ tq $\mathcal{L}(f), \mathcal{L}(f')$ et $\mathcal{L}(f'')$ sont définies pour $Re(p) > \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}(f'')(p) = p\mathcal{L}(f') - f'(0^+) = p(p\mathcal{L}(f) - f(0^+) - f'(0^+)\\&= p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0^+) - f'(0^+)\end{aligned}$$

Plus généralement, si f est C^n tq $\mathcal{L}(f^k)$ existe $\forall k = 0, 1...., n$ pour $Re(p) > \alpha$

$$\mathcal{L}(f^n)(p) = p^n\mathcal{L}(f)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1}f^{(k)}(0^+)$$

<u>Comme corollaire</u> Si $F' = f$ et $F(0) = 0$ alors $\mathcal{L}(F)(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p)$

Application

1. Application à la résolution d'équations différentielles
   On suppose que $f'' + af = \sin(t)$. Calculer $\mathcal{L}(f)$
2. Trouver f tq $\mathcal{L}(f) = \frac{p}{p^2+3p+2}$

— **P4 : Effet de la dérivation**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathcal{L}(f(t))(p) = -\mathcal{L}(tf(t))(p)$$

Démonstration. $\mathcal{L}(f(t))(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$
On suppose que l'on a toutes les hypothèses requises pour dériver terme à terme. On obtient $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathcal{L}(f(t))(p) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = -\mathcal{L}(tf(t))(p)$ $\square$

En conséquence :
Corollaire $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}\mathcal{L}(f)(p) = (-1)^n\mathcal{L}(t^nf(t))(p)$
En particulier $\mathcal{L}(t^n)(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$

Démonstration. $\mathcal{L}(t^n)(p) = (-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}\mathcal{L}(1)(p) = (-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}(\frac{1}{p})$ $\square$

Transformée d'un produit de convolution

Soient $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ deux fonctions causales. On a par définition :

$$f * g(t) = \int_0^{+\infty} f(x)g(t-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t f(x)g(t-x)\,\mathrm{d}x$$

On a alors la propriété :

— **P5** Si $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ causales, alors : $\mathcal{L}(f * g)(p) = \mathcal{L}(f)(p)\mathcal{L}(g)(p)$

Exemple. Calculer la T.L des fonctions suivantes

1. $f_1(t) = 3t^2 - 5t + 1$
2. $f_2(t) = e^t - e^{2t}\cos(\frac{2}{3}t)$
3. $f_3(t) = \cos^2(t)$

$\Rightarrow \mathcal{L}(t^n)(p) = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N}$

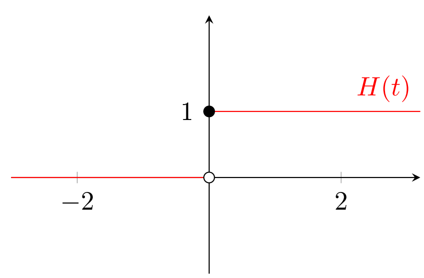
1. Par linéarité $\mathcal{L}(f_1(t))(p) = 3\mathcal{L}(t^2)(p) - 5\mathcal{L}(t)(p) + \mathcal{L}(1)(p) = \frac{6}{p^3} - \frac{5}{p^2} + \frac{1}{p}$
2. $\mathcal{L}(e^{at})(p) = \frac{1}{p-a}$; $\mathcal{L}(e^{-at}f(t))(p) = \mathcal{L}(f(t))(a+p)$; $\mathcal{L}(f(at))(p) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f(t))(\frac{p}{a})$
   On a par linéarité :
   $\mathcal{L}(f_2(t))(p) = \mathcal{L}(e^t)(p) - \mathcal{L}(e^{2t}\cos(\frac{2}{3}t))(p) = \frac{1}{p-1} - \mathcal{L}(\cos(\frac{2}{3}t))(p-2)$
   $= \frac{1}{p-1} - \frac{3}{2}\mathcal{L}(\cos(t))(\frac{3}{2}(p-2))$
   Or $\mathcal{L}(\cos(t))(p) = \frac{p}{p^2+1}$
   Donc $\mathcal{L}(f_2(t))(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{3}{2}\frac{\frac{3}{2}(p-2)}{\left[\frac{3}{2}(p-2)\right]^2+1} = \frac{1}{p-1} - 9\frac{p-2}{9(p-2)^2+4}$

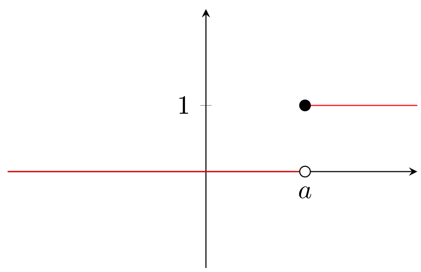
   (a) 1$^{\text{re}}$ méthode : Linéarisation : $\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$
   Donc $\mathcal{L}(\cos^2(t))(p) = \frac{1}{2p} + \frac{1}{4}\mathcal{L}(\cos(t))(\frac{p}{2}) = \frac{1}{2p} + \frac{1}{4}\frac{\frac{p}{2}}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4}$

   (b) 2$^{\text{e}}$ méthode (générale)
   $\mathcal{L}((f^2)')(p) = p\mathcal{L}(f^2)(p) - f^2(0^+)$
   Donc $2\mathcal{L}(ff')(p) = p\mathcal{L}(f^2)(p) - f^2(0^+)$ Cette formule marche si l'on sait calculer $\mathcal{L}(ff')(p)$

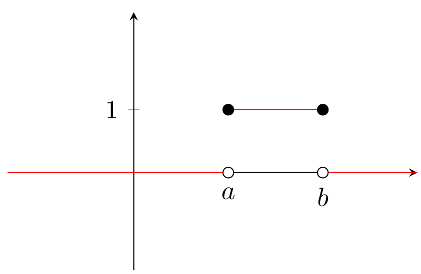
3.2 Utilisation de l'échelon de Heaviside pour définir une fonction causale c.p.m sur un segment [a,b]

Cas particuliers :

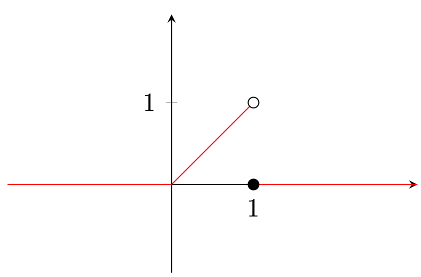




$$f_1(t) = H(t-1) = \begin{cases} 1 & si\ t > a \\ 0 & si\ t < a \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$



$$f_2(t) = H(t-a) - H(t-b) = \begin{cases} 1 & si\ t \in]a,b[\\ 0 & si\ t \notin [a,b] \end{cases}$$



$$f_3(t) = t(H(t) - H(t-1)) \quad t \in \mathbb{R}$$

3.3 Transformée de Laplace d'une fonction périodique

Proposition Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction c.p.m périodique où $T > 0$. Alors on a

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T f(u)e^{-pu}\,\mathrm{d}u$$

pour $Re(p) > 0$

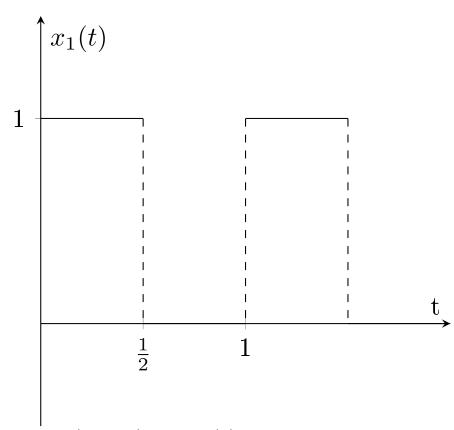
Démonstration. Soit $p \in \mathbb{C}$ tq $Re(p) > 0$. On a
$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$ (Relation de Chasles)
$= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^T f(u+kT)e^{-p(u+kT)}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-pkT} \int_0^T f(u)e^{-pu}\,\mathrm{d}u$
$= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-pkT}\right)\left(\int_0^T f(u)e^{-pu\,\mathrm{d}u}\right)$
$|e^{-pT}| = e^{-Re(p)T} < 1$ donc $\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T f(u)e^{-pu}\,\mathrm{d}u$ $\square$

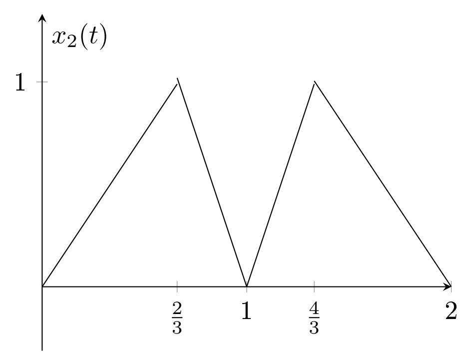
Remarque 12. Si l'on désigne par g la fonction définie par $g(t) = \begin{cases} f(t) & si\ t \in [0,T] \\ 0 & sinon \end{cases}$

Alors

$$\int_0^T f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}(g)(p)$$

Exemple. Donner la transformée de Laplace des signaux suivants



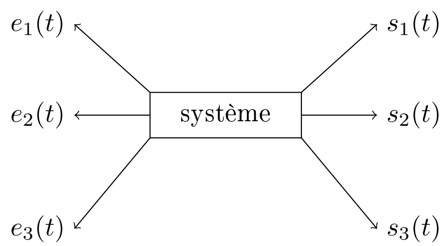


- $x_1(t+1) = x_1(t) \quad \forall t \geq 0$
  $\mathcal{L}(x_1(t))(p) = \frac{1}{1-e^{-p}} \int_0^1 x_1(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-e^{-p}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-pt}\,\mathrm{d}t$
  $Re(p) > 0 \quad \mathcal{L}(x_1(t))(p) = \frac{1}{1-e^{-p}} \frac{1}{p}[1 - e^{\frac{-p}{2}}]$
- $x_2(t+1) = x_2(t) \quad \forall t \geq 0$
  $\mathcal{L}(x_2(t))(p) = \frac{1}{1-e^{-p}} \int_0^1 x_2(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-e^{-p}} \left[\int_0^{\frac{2}{3}} x_2(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{2}{3}}^1 x_2(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t\right]$
  $x_2(t) = \frac{3}{2}t \quad pour\ 0 \leq t \leq \frac{2}{3}$
  $x_2(t) = 3(1-t) \quad si\ t \in [\frac{2}{3}, 1]$

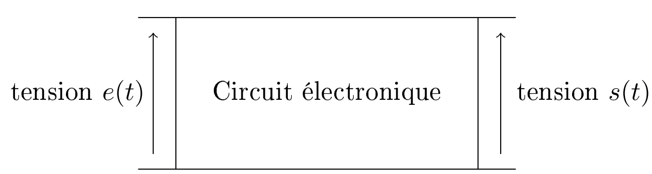
$\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{3}{2}te^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\left[\frac{-t}{p}e^{-pt}\right]_0^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{1}{p}e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\frac{\frac{-2}{3}}{p}e^{-p\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{p^2}e^{-pt}\right]_0^{\frac{2}{3}}$
On fait de même pour $\int_{\frac{2}{3}}^{1}(1-t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$

3.4 Utilisation de la transformée de Laplace dans l'étude d'un système physique

Définition. Un système physique (ou système tout court) est un ensemble fonctionnel qui a une excitation ou entrée $e(t)$ à un instant t réagit en donnant une réponse $s(t)$



Exemple.



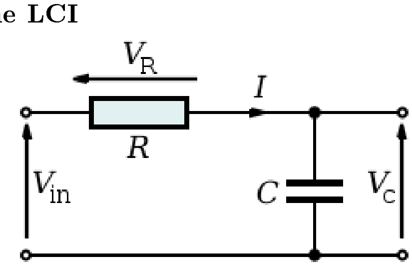
Les systèmes qu'on étudiera dans ce chapitre sont les systèmes qui vérifient :

1. linéarité : à l'entrée : $e(t) = \lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t)$
   la sortie : $s(t) = \lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t)$
2. causalité : si l'on a $e(t) = 0$ pour $t < 0$ alors la sortie s du système vérifie $s(t) = 0$ pour $t < 0$
3. invariance temporelle : (système statique) si $s(t)$ est la sortie correspondante à $e(t)$ alors $s(t - t_0)$ est la sortie correspondante à $e(t - t_0)$

On résume tout ça en disant que le système est LCI

Exemple d'un système LCI

1.



2. L'exemple fondamental d'un système LCI est un système dont l'entrée et la sortie sont liées par une équation différentielle de la forme

$$a_n s^{(n)}(t) + \ldots + a_1 s'(t) + a_0 s(t) = b_m e^{(m)}(t) + \ldots + b_1 e'(t) + b_0 e(t) \quad (E)$$

où les a_i et b_i sont des scalaires
On suppose que les entrées et sorties de notre système sont régies par l'équation différentielle (E) et que les conditions initiales vérifient

$$e^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k = 0, 1, \ldots, m-1$$
$$s^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Si on applique la transformée de Laplace aux deux membres de (E) pour $k = 0, 1, \ldots, n$

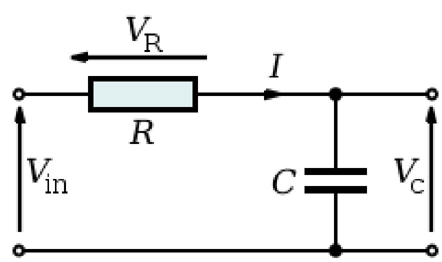
$$\mathcal{L}(s^{(k)}(t))(p) = p^k \mathcal{L}(s(t))(p) + \underbrace{\sum_{i=0}^{p-1} p^{k-1-i} s^{(i)}(0)}_{=0} = p^k \mathcal{L}(s(t))(p) = p^k S(p)$$

où $S(p) = \mathcal{L}(s(t))(p)$
De même en notant $E(p) = \mathcal{L}(e(t))(p)$ on obtient

$$\left(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0\right) S(p) = \left(b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0\right) E(p)$$

d'où $S(p) = \frac{b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0} E(p)$
La fonction $h(p) = \frac{b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0}$ s'appelle la fonction de transfert du système

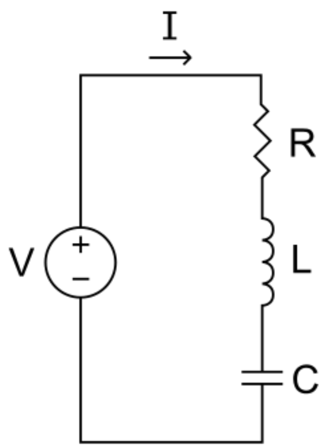
Exemple. Donner la fonction de transfert du système du système constitué du circuit RC de l'exemple où l'entrée $e(t)$: tension aux bornes d'un générateur et la sortie $s(t)$: la tension aux bornes d'un condensateur
$\Rightarrow$ Réponse :



On a $e(t) = Ri(t) + s(t) = RC\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t)$
On suppose que les CI sont nulles, la fonction de transfert du circuit RC est

$$E(p) = (1 + RCp)S(p)$$
$$h(p) = \frac{1}{1 + RCp}$$

Exercice. Faire de même pour le circuit RLC



$\Rightarrow \quad e(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + s(t) = LC\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2}s(t) + RC\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t)$
Donc $E(p) = (LCp^2 + RCp + 1)S(p)$
Donc $h(p) = \frac{1}{LCp^2+RCp+1}$

Exemple. Un exemple pratique d'un système LCI est un système dans lequel

$$\sum_{k=0}^{n} a_k s^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k e^{(k)}(t)$$

Définition. Réponse impulsionnelle
On appelle réponse impulsionnelle d'un système la réponse du système lorsque l'entrée est $e(t) = \delta(t)$ où δ est l'impulsion de Dirac

Théorème fondamental

Théorème 8. Soit un système LCI de réponse impulsionnelle $h(t)$. Alors la réponse du système associée à toute entrée $e(t)$ est $s(t) = e * h(t)$